الخاصة الخامسة: المؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{\varphi(D)}$ دالة الأسية e^{mx}

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{\varphi(m)} \cdot e^{mx} \quad ; \quad \varphi(m) \neq 0$$

الإثبات: نعلم أن:

$$\varphi(D) \cdot e^{mx} = \varphi(m) \cdot e^{mx}$$

نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{\varphi(D)}$ فنجد أن:

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot \varphi(D) \cdot e^{mx} = \frac{1}{\varphi(D)} \cdot \varphi(m) \cdot e^{mx}$$

أي أن:

$$e^{mx} = \varphi(m) \cdot \frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx}$$

- وإذا كان $\varphi(m) \neq 0$ عندئذ:

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{\varphi(m)} \cdot e^{mx}$$

مثال: أوجد ناتج

$$\frac{1}{D^3-2D^2+3D+7} \cdot e^{x} = \frac{1}{9} \cdot e^{x}$$

$\varphi(D) = D^3-2D^2+3D+7$

$\varphi(1) = 1-2+3+7 = 9$

- أما إذا كان $\varphi(m)=0$ هذا يعني $D=M$ هي موضع صفري للدالة $\varphi(D)$ أو جذر للمعادلة $\varphi(D)=0$.

تعريف: نقول عن x_0 أنها موضع صفري للدالة $f(x)$ من الدرجة ℓ عندما:

~~$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(\ell-1)}(x_0) = 0$~~

$$f(x_0) = f'(x_0) = \text{---} = f^{(\ell-1)}(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f^{\ell}(x_0) \neq 0$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \quad \wedge \quad f'''(0) \neq 0$$

مثال:

$f(x) = x^4 - 2x^3 \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = 12x^2 - 12x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = 24x - 12 \Rightarrow f'''(0) = -12 \neq 0$

أ- بناءاً على هذا التعريف إذا كانت $D=M$ صفر من الدرجة الأولى للمؤثر التفاضلي $\varphi(D)$ عندئذٍ : $\varphi(D) = (D-M)\cdot\psi(D)$ ، $\psi(M) \neq 0$

$$\varphi'(D) = \psi(D) + (D-M)\cdot\psi'(D)$$

$$\varphi'(M) = \psi(M) + 0$$

ما يعني أنّ :

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{(D-M)\cdot\psi(D)} \cdot e^{mx}$$

$$= \frac{1}{(D-M)} \cdot \frac{1}{\psi(D)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{D-M} \cdot \frac{1}{\psi(M)} \cdot e^{mx}$$

$$= \frac{1}{\psi(M)} \cdot \underbrace{\frac{1}{D-M} \cdot e^{mx}}_{x \cdot e^{mx}} = \frac{1}{\psi(M)} \cdot x \cdot e^{mx} = \frac{1}{\varphi'(M)} \cdot x \cdot e^{mx}$$

$\Leftarrow$

مثال :

$f(x) = (x^2 + 3x + 2)\, x^2$

$x^2 + 3x + 2 = 0$ ، $x^2 = 0$ ينعدم عنده النقاط

$(x+1)(x+2) = 0$ ، $x_1 = x_2 = 0$

$x = -1$

$x = -2$

$f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2$

$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 4x$ ، $f'(0) = 0$

$f''(x) = 12x^2 + 9x + 4$ ، $f''(0) = 4 \neq 0$

$f(x) = (x-0)^2 \cdot \varphi(x)$ ، $\varphi(x) \neq 0$

$f(x) = (x+1)(x^3 + 2x^2)$

$f(-1) = 0$ ، $f'(-1) = 1 \neq 0$

SUBJECT:

$$f(x) = (x+2)(x^3+x^2) \qquad x=-2$$

⇐ وبالتالي فإن : عندما D=M صفر من الدرجة الأولى لـ $\varphi(D)$ فإن :

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx} = \frac{x \cdot e^{mx}}{\varphi'(D)\Big|_{D=M}}$$

مثال توضيحي : أوجد ناتج :

$$\frac{1}{D^3 - D} \cdot e^{x} = \frac{x \cdot e^{x}}{3D^2 - 1\Big|_{D=1}} = \frac{x \cdot e^{x}}{2}$$

$\varphi(D) = D^3 - D$ $\qquad \varphi(1) = 1 - 1 = 0$ $\qquad$ نلاحظ بأن m=1

$\varphi'(D) = 3D^2 - 1$ $\qquad \varphi'(1) = 3 - 1 = 2 \neq 0$

-٢- إذا كان D=M صفر من الدرجة الثانية لـ $\varphi(D)$

$$\varphi(D) = (D-M)^2 \, \psi(D) \quad ; \quad \psi(M) \neq 0$$

$$\varphi'(D) = 2(D-M) \cdot \psi(D) + (D-M)^2 \cdot \psi'(D) \qquad \varphi'(M) = 0$$

$$\varphi''(D) = 2\psi(D) + 4(D-M) \cdot \psi'(D) + (D-M)^2 \cdot \psi''(D)$$

$$0 \neq \varphi''(M) = 2\psi(M) + 0 + 0 \qquad \psi(M) \neq 0$$

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{(D-M)^2 \psi(D)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{(D-M)^2} \cdot \frac{1}{\psi(D)} \cdot e^{mx}$$

$$= \frac{1}{(D-M)^2} \cdot \frac{1}{\psi(M)} \cdot e^{mx} \qquad \psi(M) \neq 0$$

$$= \frac{1}{\psi(M)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(D-M)^2} \cdot e^{mx}}_{\frac{x^2 \cdot e^{mx}}{2}} = \frac{1}{\psi(M)} \cdot \frac{x^2 \cdot e^{mx}}{2}$$

$$= \frac{x^2 \cdot e^{mx}}{2\psi(M)}$$

أي أن :

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx} = \frac{x^2 \cdot e^{mx}}{\varphi''(D)\Big|_{D=M}}$$

$$\varphi(M) = \varphi'(M) = 0 \wedge \varphi''(M) \neq 0$$

مثال توضيحي : أوجد ناتج ما يلي :

$$\frac{1}{D^3+7D^2+15D+9} \cdot e^{-3x} = \frac{x^2 \cdot e^{-3x}}{-4}$$

$\varphi(D) = D^3 + 7D^2 + 15D + 9$; $m = -3$

$\varphi(-3) = -27 + 63 - 45 + 9 = 0$

$\varphi'(D) = 3D^2 + 14D + 15$

$\varphi'(-3) = 27 - 42 + 15 = 0$

$\varphi''(D) = 6D + 14$

$\varphi''(-3) = -18 + 14 = -4 \neq 0$

٣- إذا كانت $D = M$ صفر من الدرجة ℓ لـ $\varphi(D)$

عندئذٍ :

$$\varphi(D) = (D-M)^{\ell} \cdot \psi(D) \qquad \psi(M) \neq 0$$

$$\varphi^{(\ell)}(D) = \psi^{(\ell)}(D) \cdot (D-M)^{\ell} + \ell \cdot \psi(D)^{\ell-1} \ell (D-M)^{\ell-1} + \frac{\ell(\ell-1)}{2!} \psi(D)^{\ell-2} \cdot \ell(\ell-1) \cdot (D-M)^{\ell-2} + ___ + \psi(D) \cdot \ell!$$

$$\varphi^{\ell}(M) = \psi^{\ell}(M) \cdot \ell! \qquad \varphi^{\ell}(M) \neq 0 \Rightarrow \psi(M) \neq 0$$

عندئذٍ

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{(D-M)^{\ell}} \cdot \frac{1}{\psi(D)} \cdot e^{mx}$$

$$= \frac{1}{(D-M)^{\ell}} \cdot \frac{1}{\psi(M)} \cdot e^{mx} = \frac{1}{\psi(M)} \cdot \frac{1}{(D-M)^{\ell}} e^{mx}$$

$\frac{x^{\ell} \cdot e^{mx}}{\ell!}$

$$= \frac{1}{\psi(M)} \cdot \frac{x^{\ell} \cdot e^{mx}}{\ell!}$$

$$= \frac{x^{\ell} \cdot e^{mx}}{\psi(M) \cdot \ell!}$$

إذا :

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx} = \frac{x^{l} \cdot e^{mx}}{\varphi^{(l)}(D)\big|_{D=m}}$$

حيث $\varphi(m) = \varphi'(m) = \text{———} = \varphi^{l-1}(m) = 0 \wedge \varphi^{l}(D) \neq 0$

مثال: أوجد ناتج

$$\frac{1}{(D-2)^5 (D+1)^2} e^{2x} = \frac{x^5 \cdot e^{2x}}{\left[(D-2)^5 \cdot (D+1)^2\right]^{(5)}_{D=2}}$$

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$(D+1)^2 = D^2 + 2D + 1$

$(D-2)^5 = D^5 - 10D^4 + 40D^3 - 80D^2 + 80D - 2$

$D^2 + 2D + 1$

D^7.

$(D-2)^5 (D+1)^2 = D^7 - 8D^6 + 21D^5 - 10D^4 - 40D^3 + 78D^2 + 76D - 2$. 1

$\varphi'(D) = 7D^6 - 48D^5 + 105D^4 - 40D^3 - 120D^2 + 156D + 76$.

$\varphi''(D) = 42D^5 - 240D^4 + 420D^3 - 120D^2 - 240D + 156$

$\varphi'''(D) = 210D^4 - 960D^3 + 1260D^2 - 240D - 240$

$\varphi''''(D) = 840D^3 - 2880D^2 + 2520D - 240$

$\varphi^5(D) = 2520D^2 - 5760D + 2520$

$2520 \cdot 4 - 5760 \cdot 2 + 2520 = 10080 - 11520 + 2520$.

$$\frac{1}{(D-2)^5} \cdot \frac{1}{(D+1)^2} e^{2x} = \frac{1}{(D-2)^5} \cdot \frac{1}{9} \cdot e^{2x}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(D-2)^5} \cdot e^{2x} = \frac{x^5 \cdot e^{2x}}{9 \cdot 5!} =$$

$\varphi^{(5)}(2) = 1080$

مثال: أوجد ناتج:

$$\frac{1}{D^3+3D^2+3D+1} \cdot e^{-x} = \frac{x^3 \cdot e^{-x}}{6}$$

ط1

$\varphi(D) = D^3+3D^2+3D+1 \quad ; \quad m=-1$

$\varphi(-1) = (-1)+3-3+1 = 0$

$\varphi'(D) = 3D^2+6D+3$

$\varphi'(-1) = 3-6+3 = 0$

$\varphi''(D) = 6D+6$

$\varphi''(-1) = -6+6 = 0$

$\varphi'''(D) = 6$

$\varphi'''(-1) = 6 \neq 0$

ط2

$$\frac{1}{(D+1)^3} \cdot e^{-x} = \frac{x^3 \cdot e^{-x}}{3!}$$

الخاصة السادسة: "خاصة الزحزحة الأسية"

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx} \cdot V(x) = e^{mx} \frac{1}{\varphi(D+m)} \cdot V(x)$$

الإثبات:

لنفرض أن $\frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx} \cdot V(x) = u(x)$ لنؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي $\varphi(D)$

فنجد أن:

$$\varphi(D) \cdot u(x) = \varphi(D) \cdot \frac{1}{\varphi(D)} \cdot e^{mx} \cdot V(x)$$

$$\varphi(D) \cdot u(x) = e^{mx} \cdot V(x)$$

$$\varphi(D) \cdot e^{-mx} e^{mx} \cdot u(x) = e^{mx} \cdot V(x)$$

وبالتالي فإن:

$$e^{mx} \cdot \varphi(D+m) \cdot e^{-mx} \cdot u(x) = e^{mx} \cdot V(x)$$

أي أن:

$$\varphi(D+m)\cdot e^{-mx}\cdot u(x) = v(x)$$

نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{\varphi(D+m)}$

$$e^{-mx}\cdot u(x) = \frac{1}{\varphi(D+m)}\cdot v(x)$$

بضرب طرفي المساواة من اليسار بـ e^{mx}.

$$u(x) = e^{mx}\cdot\frac{1}{\varphi(D+m)}\cdot v(x)$$

أي أن:

$$\frac{1}{\varphi(D)}\cdot e^{mx}\, v(x) = e^{mx}\cdot\frac{1}{\varphi(D+m)}\cdot v(x)$$

ملاحظة: العديد من الحالات الخاصة من الخاصة الرابعة يمكن اثباتها على هذه الخاصة:

$$\frac{1}{D-m}\cdot e^{mx} = e^{mx}\cdot\frac{1}{D}\cdot 1 = x e^{mx}$$

$$\frac{1}{(D-m)^2}\, e^{mx} = e^{mx}\,\frac{1}{D^2}\cdot 1 = \frac{x^2\cdot e^{mx}}{2}$$

الخاصة السابعة: المؤثر التفاضلي العكسي والدوال المثلثية $\sin ax$; $\cos ax$

أ. أولاً عندما يحتوي المؤثر تفاضلي العكسي على قوى D الزوجية فقط عندها:

$$\frac{1}{\varphi(D^2)}\cdot\cos ax = \frac{1}{\varphi(-a^2)}\cdot\cos ax \quad ; \varphi(-a^2)\neq 0$$

$$\frac{1}{\varphi(D^2)}\cdot\sin ax = \frac{1}{\varphi(-a^2)}\cdot\sin ax \quad ; \varphi(-a^2)\neq 0$$

الإثبات: الخاصة الأولى:

نعلم أن $\varphi(D^2)\cos ax = \varphi(-a^2)\cdot\cos ax$

نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{\varphi(D^2)}$ فنجد أنه:

$$\cos ax = \frac{1}{\varphi(D^2)} \cdot \varphi(-a^2) \cdot \cos ax$$

$$\cos ax = \varphi(-a^2) \cdot \frac{1}{\varphi(D^2)} \cdot \cos ax$$

بتقسيم طرفي المساواة على $\varphi(-a^2) \neq 0$

نجد أن: $\varphi(-a^2) \neq 0$ ،

$$\frac{1}{\varphi(D^2)} \cdot \cos ax = \frac{1}{\varphi(-a^2)} \cdot \cos ax$$

• بطريقة مشابهة تماماً يتم إثبات صحة العلاقة الثانية.

مثال: أوجد ناتج ؟

$$\frac{1}{D^6 + D^2} \cdot \cos x = \frac{1}{-2} \cdot \cos x$$

$a = 1$; $\varphi(D^2) = \varphi(-a^2)$

$$\varphi(D^2) = (D^2)^3 + D^2$$

$$\varphi(-1) = (-1)^3 + 1 = -2 \neq 0$$

مثال 2: أوجد ناتج

$$\frac{1}{D^4 + D^2 + 1} \cdot \sin 2x = \frac{1}{13} \cdot \sin 2x \quad ?$$

$$\varphi(D^2) = (D^2)^2 + D^2 + 1$$

$$\varphi(-4) = (-4)^2 - 4 + 1$$

$$= 13 \neq 0$$

$e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$

حقيقي $\operatorname{Re} e^{iax} = \cos ax$

تخيلي $\operatorname{Im} e^{iax} = \sin ax$

★ عندما $\varphi(-a^2) = 0$ عندما φ يحتوي على قيم D المختلفة

$$\frac{1}{\varphi(D)} \begin{matrix} \cos \\ \text{أو} \\ \sin \end{matrix} ax = \begin{matrix} \operatorname{Re} \\ \text{أو} \\ \operatorname{Im} \end{matrix} \left[\frac{e^{iax}}{\varphi(D)} \right] = \begin{matrix} \operatorname{Re} \\ \operatorname{Im} \end{matrix} \left[\frac{e^{iax}}{\varphi(ia)} \right] \quad \varphi(ia) \neq 0$$

$$= \begin{matrix} \operatorname{Re} \\ \operatorname{Im} \end{matrix} \left[\frac{x^l \cdot e^{iax}}{\varphi^l(ia)} \right]$$

$\varphi(ia) = \varphi'(ia) = \ldots = \varphi^{l-1}(ia) = 0$

$\varphi^l(ai) \neq 0$

ملاحظة: يمكن اثبات صحة العلاقتين:

$$\frac{1}{D^2+a^2}\cdot\cos ax = \frac{x}{2a}\sin ax$$

$$\frac{1}{D^2+a^2}\cdot\sin ax = -\frac{x}{2a}\cdot\cos ax$$

لنثبت صحة هاتين العلاقتين اعتماداً على هذه الخاصة.

-1-

$$\frac{1}{D^2+a^2}\cdot e^{iax} = \frac{1}{D^2+a^2}\left(\cos ax + i\cdot\sin ax\right)$$

$$= \frac{1}{D^2+a^2}\cdot\cos ax + i\,\frac{1}{D^2+a^2}\cdot\sin ax \quad ★$$

$$\frac{1}{D^2+a^2}\cdot e^{iax} = \frac{x\cdot e^{iax}}{2ia}$$

$\varphi(D) = D^2+a^2$

$\varphi(ia) = -a^2+a^2 = 0$

$\varphi'(D) = 2D$

$\varphi'(ia) = 2ia \neq 0$

$$= \frac{x}{2a}\cdot\frac{(\cos ax + i\sin ax)}{i}$$

$$= \frac{x}{2a}(\sin ax - i\cdot\cos ax)$$

$$= \frac{x}{2a}\cdot\sin ax - i\frac{x}{2a}\cdot\cos ax \quad ★★$$

بمقارنة ★ مع ★★ نستنتج أن:

$$\frac{1}{D^2+a^2}\cdot\cos ax + i\cdot\frac{1}{D^2+a^2}\cdot\sin ax = \frac{x}{2a}\sin ax - i\frac{x}{2a}\cos ax$$

واعتماداً على تساوي عددين عقديين ينتج أن:

$$\frac{1}{D^2+a^2}\cdot\cos ax = \frac{x}{2a}\cdot\sin ax$$

$$\frac{1}{D^2+a^2}\cdot\sin ax = -\frac{x}{2a}\cdot\cos ax$$

SUBJECT: / /

مثال: أوجد ناتج $\frac{1}{D^3+D^2-D-1} \cdot \sin x$

ط1

$$= \frac{1}{D \cdot D^2 + D^2 - D - 1} \cdot \sin x = \frac{1}{-D-1-D-1} \cdot \sin x$$

$$= \frac{1}{-2D-2} \sin x = -\frac{1}{2} \frac{1}{D+1} \cdot \sin x$$

$\frac{1}{D-m} \cdot \sin ax = \frac{1}{a^2+m^2}(-a \cdot \cos ax - m \cdot \sin ax)$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+1}[\cos x + \sin x]\right] = -\frac{1}{4}[\cos x + \sin x]$$

ط2

$$\frac{1}{D^3+D^2-D-1} \cdot \sin x = Im\left[\frac{e^{ix}}{D^3+D^2-D-1}\right]$$

$$\varphi(D) = D^3 + D^2 - D - 1$$

$$\varphi(i) = i^3 + i^2 - i - 1 = -i - 1 - i - 1$$

$$= -2i - 2 = -2(1+i)$$

$$= \frac{1}{D^3+D^2-D-1} \sin x = Im \cdot \frac{e^{ix}}{-2(1+i)}$$

$$= Im\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-i)e^{ix}}{2}\right]$$

$$= Im\left\{-\frac{1}{4}\left[(1-i)(\cos x + i \sin x)\right]\right\}$$

$$= Im\left[-\frac{1}{4}\left[(\cos x + \sin x) + i(-\cos x + \sin x)\right]\right]$$

$$= -\frac{1}{4}(-\cos x + \sin x)$$